

## Cours 10 (Exercice)

Ex 98  $(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-t) g(t) dt$  mesure de Lebesgue.

### Rappel

- Une fonction  $L^1$  est une fonction  $f$  p.p. définie (mesurable) et  $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty$
- Deux fonctions  $L^1$  sont identifiées si elles ne diffèrent que sur un sous-ens. négligeable (mesure = 0)
- Thm (Fubini-Tonelli)  $X, Y$ : espaces mesurés.  
 $F(x, y)$  une fonction à 2 variables sur  $X \times Y$

Alors

$$\int_{X \times Y} |F(x, y)| d\mu_{X \times Y}(x, y) = \int_X \left( \int_Y |F(x, y)| d\mu_Y(y) \right) d\mu_X(x) = \int_Y \left( \int_X |F(x, y)| d\mu_X(x) \right) d\mu_Y(y).$$

(intégrable  $\Leftrightarrow$  intégrable  $\Leftrightarrow$  intégrable)

But:  $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow f * g \in L^1(\mathbb{R})$

On considère la fonction à deux variables :

$$F(x, t) = f(x-t)g(t)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_x} \underbrace{\left( \int_{\mathbb{R}_t} |F(x, t)| dt \right)}_{|f * g|} dx &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}_t} \left( \int_{\mathbb{R}_x} |F(x, t)| dx \right) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}_t} \left( \int_{\mathbb{R}_x} |f(x-t)| |g(t)| dx \right) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}_t} |g(t)| \left( \int_{\mathbb{R}_x} |f(x-t)| dx \right) dt \\ &\stackrel{\text{invariance par translation de Lebesgue}}{=} \int_{\mathbb{R}_t} |g(t)| \underbrace{\left( \int_{\mathbb{R}_x} |f(x)| dx \right)}_{\|f\|_{L^1}} dt \\ &= \|f\|_{L^1} \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}_t} |g(t)| dt}_{\|g\|_{L^1}} = \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1} < \infty \end{aligned}$$

Fubini  $\Rightarrow f * g \in L^1(\mathbb{R})$

Donc  $*$  est bien-défini sur  $L^1(\mathbb{R})$

Pour mq  $(L^1(\mathbb{R}), +, *)$  est un anneau comm.

- $(L^1(\mathbb{R}), +)$  est un gp abélien ✓  
(même un G.e.v.)

$$\left( \begin{array}{l} \cdot \int_{\mathbb{R}} |f+g| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f| dx + \int_{\mathbb{R}} |g| dx = \|f\|_1 + \|g\|_1 < \infty \\ \cdot f \sim f', g \sim g' \text{ alors } f+g \sim f'+g' \end{array} \right)$$

- Associativité :

$$(f * g) * h = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x-y-s) g(y) dy \right) h(s) ds$$

$$f * (g * h) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t) \left( \int_{\mathbb{R}} g(t-s) h(s) ds \right) dt$$

$$\text{Fubini} = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(x-y-s) g(y) h(s) dy ds.$$

$$\underline{y \leftrightarrow t-s} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(x-t) g(t-s) h(s) \, ds \, dt$$

• Distributivité

$$(f+g) * h = \int_{\mathbb{R}} (f(x-t) + g(x-t)) h(t) \, dt$$

$$\parallel$$

$$\dots$$

$$= f * h + g * h.$$

• Commutativité

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t) g(t) \, dt$$

$$(g * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x-t) f(t) \, dt$$

Lebesgue  
est invariant  
par réflexion

$$\stackrel{t \leftrightarrow -t}{=} \int_{\mathbb{R}} g(x+t) f(-t) dt$$

$$\stackrel{x+t \leftrightarrow t}{=} \int_{\mathbb{R}} g(t) f(\underbrace{-(t-x)}_{x-t}) dt$$

$$= (f * g)(x)$$

CCL :  $(L^1(\mathbb{R}), *, *)$  est un anneau comm.  
(mais non unitaire).

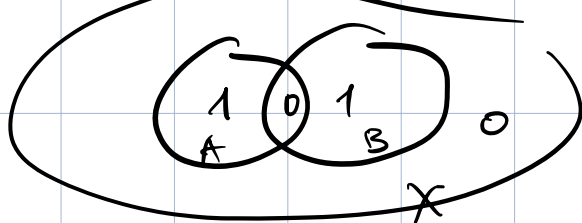
Ex 105  $\forall A \in 2^X := \mathcal{P}(X)$

$$\chi_A : X \longrightarrow \mathbb{F}_2$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

si  $x \in A$

si  $x \notin A$ .

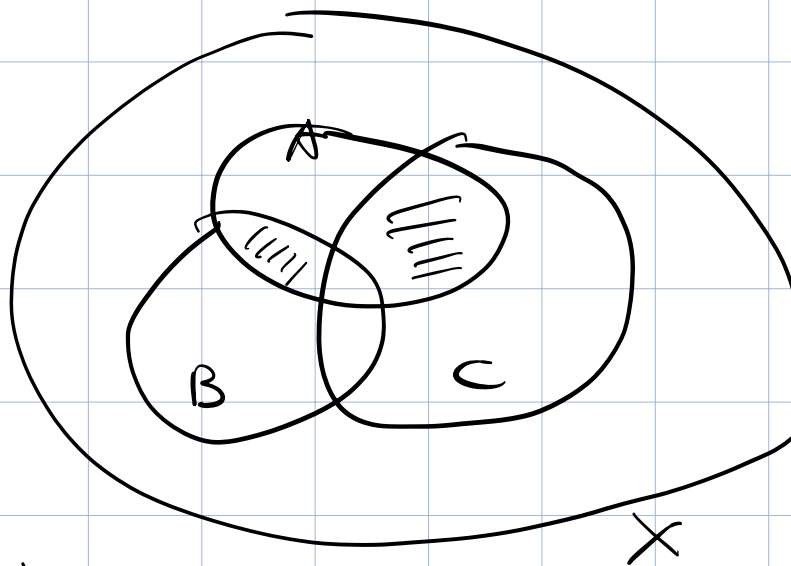


$$X_{A+B}$$



$$X_{A \cap B}$$

$$\bullet A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$



$$\bullet (A \cdot B) \cdot C = A \cap B \cap C = A \cdot (B \cdot C)$$

(5). Mq On a un isom d'anneaux

$$(R = \mathcal{P}(X), \Delta, \cap) \xrightarrow[\chi]{\cong} \mathbb{F}_2^X := \{ \text{fonctions } X \rightarrow \mathbb{F}_2 \}$$

$$A \longmapsto \chi_A$$

$$\{x \in X \mid f(x) = 1\} \longleftarrow f$$

(Exo)

Ex 108 . Indication  $1 \in A = I + J$

Ex 111

Rappel

$A$ : anneau comm unitaire

Déf

Un idéal  $\mathfrak{p} \triangleleft A$  est premier

def  
 $\Leftrightarrow$

$A/\mathfrak{p}$  est un anneau intègre

$\Leftrightarrow \forall x, y \notin \mathfrak{p}, xy \notin \mathfrak{p}$ .

Raison:

$x, y \notin \mathfrak{p} \Leftrightarrow [x], [y] \neq 0$  dans  $A/\mathfrak{p}$

intègre  
 $\Leftrightarrow$

$[x \cdot y] = [x] \cdot [y] \neq 0$  dans  $A/\mathfrak{p}$

$\Leftrightarrow xy \notin \mathfrak{p}$ .

Déf

Un idéal  $\mathfrak{m} \triangleleft A$  est max

def  
 $\Leftrightarrow$

$A/\mathfrak{m}$  est un corps

$\Leftrightarrow \mathfrak{m}$  est maximal parmi les idéaux propres de  $A$  pour  $\subseteq$

Rappel (Lemme de Zorn) (particulièrement)

Soit  $(X, \leq)$  un ensemble ordonné  
si toute chaîne totalement ordonnée  
croissante admet une majoration.  
Alors  $X$  admet un élément maximal.

Thm (Existence d'idéaux maximaux)

Soit  $A$  un anneau commutatif unitaire  
Alors  $A$  admet un idéal maximal.

Preuve Soit  $I_0 \subset I_1 \subset \dots$  chaîne  
d'idéaux propres ( $1 \notin I_i \forall i$ )

Alors  $I := \bigcup_i I_i$  est un idéal  
PROPRE  
(car  $1 \notin I$ )

Zorn  
 $\implies$

Conclusion

$\square$

Ex 111 Comme  $S$  est stable par  $\cdot$ .

On considère la localisation

$$B := S^{-1}A$$

- On a une bijection entre

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{idéaux premiers} \\ \text{de } S^{-1}A \end{array} \right\} \xleftrightarrow{\cong} \left\{ \begin{array}{c} \text{idéaux premiers} \\ \text{de } A \text{ qui} \\ \text{ne rencontrent} \\ \text{pas } S \end{array} \right\}$$

(Exo) (cette bijection préservant  $\subseteq$ )

- Par Thm d'existence :

$\exists \mathfrak{m} \triangleleft B = S^{-1}A$  idéal maximal  
 $\xRightarrow{\text{bijection}}$  l'idéal correspondant  
 $\widetilde{\mathfrak{m}} \triangleleft A$  qui ne rencontre pas  $S$   
est maximal parmi ---